Aula 5

Ex. 1) a) $f_n(x) = \frac{x}{n}$, $x \in [0,1]$ (slide 8)

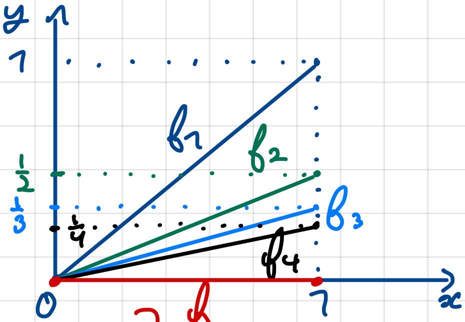
$f_1(x) = x$

$f_2(x) = \frac{x}{2}$

$f_3(x) = \frac{x}{3}$

$f_4(x) = \frac{x}{4}$

	$x=0$	$x=1$
$f_1(x)$	0	1
$f_2(x)$	0	1/2
$f_3(x)$	0	1/3
$f_4(x)$	0	1/4



b) $h_n(x) = x^n$, $x \in [0,1]$ (slide 9)

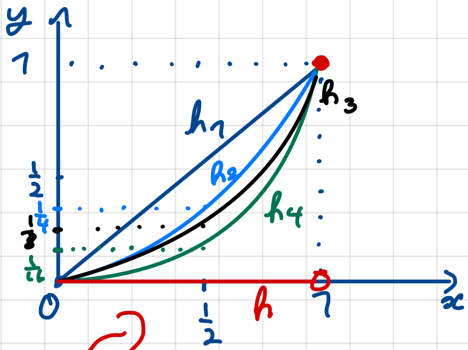
$h_1(x) = x$

$h_2(x) = x^2$

$h_3(x) = x^3$

$h_4(x) = x^4$

	$x=0$	$x=\frac{1}{2}$	$x=1$
$h_1(x)$	0	1/2	1
$h_2(x)$	0	1/4	1
$h_3(x)$	0	1/8	1
$h_4(x)$	0	1/16	1



Ex 2) a) $f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \lim \frac{x}{n} = 0, \ \forall x \in [0,1]$

b) $h(x) = \lim_{n \to +\infty} h_n = \lim_{n \to +\infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0,1[\\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$

Ex 3) a) Converge uniformemente

b) Não converge uniformemente

↳ Ver applets slide 15 e resolução do exemplo 2.3 (pág 25) dos apontamentos teóricos

---

Séries de funções: $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ → sucessão de funções

4) $\sum_{n=1}^{+\infty} n^x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{-x}}$

Para cada $x \in \mathbb{R}$ é uma série de Dirichlet de ordem $\alpha = -x$

Converge se $\alpha > 1 \Leftrightarrow -x > 1 \Leftrightarrow x < -1$

Por isso: D.C. $=]-\infty, -1[$

5) Usar Critério de Weierstrass

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{x^n}{n^2}}_{f_n(x)}$ em $\underbrace{[0,1]}_{D}$

1º Passo: Encontrar $a_n \geq 0$ tal que $|f_n(x)| \leq a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in D$

$\left|\frac{x^n}{n^2}\right| \leq \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{a_n}, \ \forall x \in [0,1]$

2º Passo: Verificar que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ Converge:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \rightsquigarrow \text{Série de Dirichlet com } \alpha = 2 > 1, \text{ logo converge}$$

3º Passo: Conclusão:

Pelo critério de Weierstrass, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$ converge uniformemente em $[0,1]$

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^3}$ em $[0, 2\pi]$

1º Passo: $\left| \frac{\cos(nx)}{n^3} \right| \leq \frac{1}{n^3}, \forall x \in [0, 2\pi] \rightsquigarrow$ Acabar TPC

c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{4n^2+x^4}}_{f_n(x)}$ em $\mathbb{R}$ D

1º Passo: $\left| \frac{1}{4n^2+\underbrace{x^4}_{\geq 0}} \right| \leq \frac{1}{4n^2} \leq \frac{1}{n^2}, \forall x \in \mathbb{R} \rightsquigarrow$ Acabar TPC

d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(x+2)^n}$ em $[0, +\infty[$

1º Passo: $\left| \frac{(-1)^{n+1}}{n(x+2)^n} \right| \underset{x \geq 0}{=} \frac{1}{n(x+2)^n} \leq \overbrace{\frac{1}{n2^n}}^{a_n}, \forall x \in [0, +\infty[$

$x \geq 0 \Leftrightarrow x+2 \geq 2 \Leftrightarrow \boxed{(x+2)^n \geq 2^n}$

2º Passo: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} \rightsquigarrow$ convergente $\rightsquigarrow$ TPC. usar, por. ex. crit. de D'Alembert

3º Passo: Pelo crit. de Weierstrass a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(x+2)^n}$ conv. unif. em $[0, +\infty[$

6) $S(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} m e^{-mx}$, $x \in [1, +\infty[$

função soma $\quad f_m(x) \quad D$

a) Mostrar que S é contínua

1.º Passo Verificar que $f_m(x)$ são contínuas em $[1, +\infty[$ $\quad D$

$f_m(x) = m e^{-mx}$ são funções contínuas em $[1, +\infty[$ ✓

2.º Passo: Verificar que $\sum_{m=1}^{+\infty} f_m(x)$ é unif. conv. em $[1, +\infty[$ $\quad D$

Usar Critério de Weierstrass

1.º Passo: $|f_m(x)| = |m e^{-mx}| = \frac{m}{e^{mx}} \leq \frac{m}{e^m}$

$\hookrightarrow x \geq 1 \Leftrightarrow mx \geq m \Leftrightarrow e^{mx} \geq e^m$

2.º Passo: $\sum_{m=1}^{+\infty} a_m = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{m}{e^m} \longrightarrow$ converge (TPC.)

3.º Passo: Pelo Crit. Weierstrass, $\sum_{m=1}^{+\infty} m e^{-mx}$ conv. unif. em $[1, +\infty[$

3.º Passo: Conclusão

Pelo Teorema slide 23 (i), temos que $S(x)$ é contínua em $[1, +\infty[$ //

b) Determinar $S'(x)$

1.º Passo
2.º Passo
iguais à alínea a)

3.º Passo: Calcular $f'_m(x)$ e verificar que são contínuas

$f'_m(x) = (m e^{-mx})' = m \times (-m) e^{-mx} = m^2 e^{-mx} \rightsquigarrow$ contínuas em $[1, +\infty[$, logo cada f_m é de classe C^1

4.º Passo: Verificar que $\sum_{m=1}^{+\infty} f'_m(x)$ é unif. conv. em $[1, +\infty[$ $\quad D$

$$\sum_{m=1}^{+\infty} f'_m(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} -m^2 e^{-mx}$$

Usar Crit de Weierstrass.

5.º Passo: Conclusão: S é diferenciável em $[1, +\infty[$ e $S'(x) = \left(\sum_{m=1}^{+\infty} f_m(x)\right)' = \sum_{m=1}^{+\infty} f'_m(x)$

$\hookrightarrow$ Teorema do slide 23 (iii)

$$S'(x) = \left(\sum_{m=1}^{+\infty} m e^{-mx}\right)' = \sum_{m=1}^{+\infty} -m^2 e^{-mx}$$

c) Justificar que a função soma é integrável em $[\ln 3; \ln 4]$ e calcular $\int_{\ln 3}^{\ln 4} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} n e^{-nx} \right) dx$

↳ Usar Teo. slide 23 (ii)

1° Passo
2° Passo } iguais à alínea a)

3° Passo: Calcular $\int_a^b \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$

Então $S(x)$ é integrável em $[\ln 3, \ln 4]$ (pelo Teo. slide 23 (ii)) e

$$\int_{\ln 3}^{\ln 4} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} n e^{-nx} \right) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\int_{\ln 3}^{\ln 4} n e^{-nx}\,dx}_{\text{C. aux.}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n} \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4^n} \rightarrow \underset{\text{(T.P.C.)}}{\text{Soma}} = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$

↳ Série Geométrica de razão $r = \frac{1}{3}$. Como $|r| < 1$ a série conv. e tem soma $\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$

C. aux.

$$-\int_{\ln 3}^{\ln 4} -n e^{-nx}\,dx = -\left[e^{-nx} \right]_{\ln 3}^{\ln 4} = -\left[\frac{1}{e^{nx}} \right]_{\ln 3}^{\ln 4} = -\left(\frac{1}{e^{n \ln 4}} - \frac{1}{e^{n \ln 3}} \right)$$

$u = nx$

$u' = (-nx)' = -n$

$$= -\left(\frac{1}{e^{\ln 4^n}} - \frac{1}{e^{\ln 3^n}} \right) = -\left(\frac{1}{4^n} - \frac{1}{3^n} \right)$$

$$= \frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n}$$

Nota: $\int u' e^u\,dx = e^u + c,\ c \in \mathbb{R}$